CAPITULO 1

Fundamentos Matemáticos

La matemática proporciona herramientas básicas que brindan elementos para representar, mediante el lenguaje matemático, situaciones cotidianas, con el objeto de solucionar diferentes problemas ajustados a su perfil profesional y ocupacional, estimulando sus capacidades analíticas y críticas que le facilitan el planteamiento, análisis y solución de situaciones problema.

EN ESTE CAPÍTULO

Sistemas Numéricos

- Los números Naturales
- Los números Enteros
- Los números Racionales
- Los números reales

Propiedades de las Operaciones

- Propiedad Conmutativa
- Propiedad Asociativa
- Propiedad Distributiva
- Propiedad Modulativa

Manejo de Fracciones

- Suma y Resta de fracciones Homogéneas
- Suma y Resta de Fracciones Heterogéneas
- Multiplicación de Fracciones
- División de Fracciones

potenciación y Radicación

- Potenciación
- Radicación
- Logaritmos
- Racionalización

Ecuación de la Recta

- El Modelo Lineal
- Ecuación de la Recta
- Rectas Paralelas
- Rectas Perpendiculares

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS

SISTEMAS O CAMPOS NUMÉRICOS

En matemáticas básicamente se trabaja con números, la idea es aprender a identificar las diferentes clasificaciones en que se puede ubicar cada uno de los números. A continuación un breve compendio de los sistemas o campos numéricos.

a. **Números dígitos:** Conjunto compuesto por los números con los cuales se forman los demás números. Partiendo del cero, los Dígitos están formados por los números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Suele designársele a estos números la letra **D.**

b. **Números naturales:** Conjunto formado por todos los enteros positivos. A estos números se les asigna la letra **N**. Son los números que utilizamos para contar.

N = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, …….}

c. **Números enteros:** Conjunto formado por los enteros positivos, enteros negativos y el cero. A estos números se les asigna la letra Z. **[*N = Z⁺*]**.

Z = {….., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, …….}

d. **Números racionales:** Un número racional es todo número que se pueda escribir como un cociente entre dos números enteros, con el denominador diferente de cero. Los matemáticos le asignaron la letra **Q**. De tal manera que los números racionales se definen matemáticamente como: Q = p/q**,** donde p *y* q son números enteros y q no puede ser cero [$q \neq 0$]. A los racionales pertenecen todos los enteros, todos los fraccionarios y los decimales finitos y los decimales infinitos periódicos. Son ejemplo de estos números:

$$5, \quad \frac{3}{7}, \quad -55, \quad 2{,}165, \quad -0{,}328, \quad 1.252525\ldots$$

e. **Números irracionales:** Irracional es todo número que no se puede escribir como un cociente entre dos números enteros. Podemos ver que un número no puede ser racional e irracional o sea si es racional no puede ser irracional, o lo contrario, si es irracional no puede ser racional. A los irracionales los matemáticos le asignaron la letra **I** o la **Q'**. A los irracionales pertenecen las raíces no exactas y los decimales infinitos no periódicos. Son ejemplo de estos números:

$$\sqrt{5}, \quad \sqrt[5]{28}, \quad 2{,}5732596451\ldots$$

Antes de continuar es conveniente aclarar la clasificación de los ***números decimales***, los cuales no forman un campo numérico sino que son más bien otra forma de escribir un número.

NÚMEROS DECIMALES: Los números decimales pueden ser finitos e infinitos

Números decimales finitos: Son los decimales que tienen un número determinado de cifras decimales. Son ejemplo de ellos los siguientes. 0,25 que tiene dos cifras decimales (dos cifras después de la coma). 0,4528 con cuatro cifras decimales. 3256,2 con una cifra decimal.

Números decimales infinitos: Estos números tienen un número indeterminado de cifras decimales, por esto todas las cifras no se pueden escribir y por ello se les colocan puntos suspensivos después de determinada cifra. Los números decimales infinitos pueden ser periódicos y no periódicos.

Números decimales infinitos periódicos: Son decimales en los que algunas de sus cifras decimales (o todas sus cifras decimales) se repiten con la misma frecuencia (o lo que es lo mismo se repiten con cierto periodo).

Por ejemplo 1,222222... Se repite el 2.

0,1735353535... se repite el 35.

Estos números siempre resultan de la división entre dos números enteros (siempre que el divisor sea diferente de cero).

Los decimales periódicos pueden ser puros y no puros:

DECIMAL PERIÓDICO PURO

Cuando todas sus cifras decimales se repiten con cierto período o frecuencia.
Ejemplos: 5,323232…., 0,55555….

DECIMAL PERÍODICO NO PURO

Cuando algunas de sus cifras decimales se repiten con cierto período.
Ejemplos: 74,631313131…, 0,0152362362362…

Números decimales infinitos no periódicos: En estos números sus cifras decimales no se repiten con ningún tipo de periodicidad. Por ejemplo 4,25674136..., 0,0254785... . Estos números resultan de las raíces no exactas.

Entonces podemos concluir que a los racionales también pertenecen los decimales finitos y los decimales infinitos periódicos y que a los irracionales pertenecen también los decimales infinitos no periódicos.

PORCENTAJES:

Es otra forma de escribir un decimal, Para convertir a porcentaje se debe multiplicar el decimal por cien y colocar el símbolo %.

Para convertir a decimal se debe dividir el número en porcentaje entre cien y se debe quitar el símbolo de %.

f. **NÚMEROS REALES.** Están formados por la suma de los racionales más los irracionales. Son todos los números con los cuales objeto de estudio de las matemáticas generales. Los matemáticos le asignaron la letra **R**. Todos los campos numéricos anteriores pertenecen a los números reales.

g. **NÚMEROS IMAGINARIOS:** A estos números pertenece la raíz par de todo número negativo. Se distinguen por la letra **I**. Por ejemplo $\sqrt{-4}$; No existe un número real que multiplicado por sí mismo dos veces [y más general, un número par de veces] dé como resultado un número negativo. Para solucionar este problema y poder operar con este tipo de números surgen los números imaginarios, en los cuales se define: $\sqrt{-1} = i$, y entonces la raíz par de cualquier número negativo se puede escribir en términos de **i**. Por ejemplo.

$$\sqrt{-4} = \sqrt{-1*4} = \sqrt{-1}*\sqrt{4} = i*2 = 2i$$
$$\sqrt{-25} = \sqrt{-1*25} = \sqrt{25}*\sqrt{-1} = 5i$$

h. **NÚMEROS COMPLEJOS:** Están formados por la suma de los números reales y los imaginarios. A ellos pertenecen todos los campos numéricos. Se simbolizan con la letra C. **[C = R + I].**

EJERCICIO:

1. Clasifique según los campos numéricos a los cuales pertenecen los siguientes números

NÚMERO	N	Z	Q	Q' = I	lR	i	C
0,57							
$\sqrt[3]{8}$							
$0/23$							
$5,\overline{2}$							
35%							
$\sqrt{-4}$							
$4/2$							
Π							
3,333...							
$\sqrt{8}$							
$7/0$							

2. Responda falso o verdadero. Justifique las respuestas falsas

1. Todo número negativo pertenece a los números enteros.
2. Todo número decimal infinito es irracional.
3. Todo número de la forma $\frac{p}{q}$ pertenece a los números racionales.
4. Los imaginarios están formados por la raíz no exacta de un número.
5. El cero es natural.
6. Todo entero es un número no negativo.
7. El número 0,22222... es un número real.
8. Todo número real es complejo.
9. Todo número entero pertenece a los números naturales.
10. Todas las raíces pertenecen a los irracionales.
11. $\frac{8}{0}$ No pertenece a los números racionales.
12. Todo entero es un número racional.
13. Todo decimal se puede escribir como un cociente entre dos entero.

14. 1/3 es un elemento de Z.
15. Todo número natural es un entero.
16. Todo número racional es un número real.
17. $\sqrt{3}$ es un elemento de R.
18. 0,1333...es un número irracional.
19. Todo número natural es un número irracional.

REPASO DE ALGUNOS CONCEPTOS

LEY DE LOS SIGNOS PARA LA MULTIPLICACIÓN Y PARA LA DIVISIÓN

La ley de signos para la multiplicación dice que el producto de signos iguales tiene como resultado signo positivo y el producto de signos contrarios tiene como resultado signo negativo.

La ley de signos para la división se aplica igual que la ley de signos para el producto. Lo podemos ver en el siguiente cuadro.

MULTIPLICACIÓN	DIVISIÓN
+ por + igual +	+ dividido + igual +
- por - igual +	- dividido - igual +
+ por - igual -	+ dividido - igual -
- por + igual -	- dividido + igual -

Ejemplos

$$-3.2 = -6 \qquad \frac{10}{-5} = -2$$

$$-5(-4) = 20 \qquad \frac{-12}{-8} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{-3}{6} = -\frac{1}{2} \qquad \frac{28}{36} = \frac{7}{9}$$

PROPIEDAD DE LOS SIGNOS PARA LA SUMA.

La propiedad de los signos para la suma dice que signos iguales se suman y se deja el signo que tienen y signos contrarios se restan y se deja el signo del número mayor.

Ejemplos.

$3+5=+8$ $\qquad 5-2=+3$

$-5-4=-9$ $\qquad 3-7=-4$

$-2+1=-1$ $\qquad -7+10=+3$

$-70+40=-30$ $\qquad 36a+50a=86a$

$b-6b=-5b$ $\qquad 301z-520z=-219z$

ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES

1. Propiedad Transitiva.

Si a = b y b = c entonces a = c

es decir si tenemos que m = n y n = 2 entonces m = 2.

LEY ASOCIATIVA: $\begin{cases} a+(b+c)=(a+b)+c & Suma \\ a\ (bc)=(ab)\ c & Multiplicación \end{cases}$

Ejemplos:

2 + 3 + 6 = 2 + (3 + 6) = 2 + 9 = 11

2(3)(4) = 2(3*4) = (2*3)*4 = 24

LEY CONMUTATIVA: $\begin{cases} a+b=b+a & Suma \\ ab=ba & \mathrm{Pr}oducto \end{cases}$

Ejemplos:

$3+7=7+3=10$

$(5)(3)=(3)(5)=15$

LEY DEL MÓDULO O MODULATIVA:

1. PARA LA SUMA: El número real **0** es llamado el módulo de la suma, ya que para todo número real **a** se cumple que: a + 0 = 0 + a

   Ejemplo: 5 + 0 = 0 + 5 = 5.

2. PARA LA MULTIPLICACIÓN: El número real **1** es llamado el módulo de la multiplicación, ya que para todo número real **a**, se cumple: a x 1 = 1 x a = a.

   Ejemplo: 8 x 1 = 1 x 8 = 8

PROPIEDAD DEL INVERSO:

1. **PARA LA SUMA**: Para todo número real **a** existe un único número real (llamado inverso aditivo de a), representado por **–a**, de tal suerte que: a + (-a) = (-a) + a = 0. [la adición de los inversos aditivos da como resultado el módulo aditivo]

Ejemplo:

El inverso aditivo de 6, es -6, ya que 6 – 6 = 0.

El inverso aditivo de –4, es 4, ya que -4 + 4 = 0.

2. **PARA LA MULTIPLICACIÓN**: : Para todo número real **a**≠*0* existe un único número real (llamado recíproco o inverso multiplicativo de **a**), representado por $\frac{1}{a}$, que cumple: $a\ x\frac{1}{a}=\frac{1}{a}x\ a=1$; [el producto de los inversos multiplicativos es el módulo multiplicativo]

Ejemplos:

El recíproco de 2 es ½, ya que 2 x ½ = 1.
El recíproco de ¼ es 4, ya que ¼ x 4 = 1.

PROPIEDAD DISTRIBUTIVA:

Esta propiedad solo se cumple para la multiplicación con respecto a la suma:

a (b+c) = ab + ac

Ejemplo: 3 (4 + 2) **=** 3 x 4 + 3 x 2 = 12 + 6 = 18

EJERCICIOS

Clasifique como verdadero o falso, estos enunciados.

1. Todo número real tiene un recíproco.
2. El recíproco de $-\frac{3}{5}$ *es* $\frac{5}{3}$.
3. El inverso de -3 es 3 .
4. 4 (5 × 3) = (4 × 5) (4 × 3)
5. - m + n = n - m
6. $\frac{7+2}{2} = \frac{7}{2} + 1$
7. m + (n + 3) = (m + n) + (m + 3)
8. (z + 3) 4 = 4z + 12
9. $5\left(\frac{p}{2}\right) = \frac{5p}{2}$
10. El recíproco de cero (0) es (-0).

DIVISIÓN DE CERO Y DIVISIÓN ENTRE CERO

$$0 \div b = \frac{0}{b} = 0, \quad b \neq 0$$

$$0 \div 0 = \frac{0}{0} \quad es \quad indefinido$$

$$a \div 0 = \frac{a}{0} \quad es \quad indefinido$$

SIGNOS DE AGRUPACIÓN

Los signos de agrupación se emplean para indicar que las cantidades encerradas en ellos deben considerarse como **un todo,** es decir, como una sola cantidad; por esto siempre se deben efectuar primero las operaciones indicadas dentro de los signos de agrupación. Por ejemplo en la operación 3 (5 – 2), primero se debe efectuar la operación dentro del paréntesis (cinco menos dos) y luego multiplicar el resultado por tres, así: 4 (3 – 1) = 4 (2) = 4 x 2 = 8.

Los signos de agrupación son de tres clases:

( ) Paréntesis ordinario o **paréntesis.**

[ ] Paréntesis angular o **corchete.**

{ } **Llaves**

La forma en que se emplean los signos de agrupación es la siguiente:

{ [( )] } Las operaciones se deben efectuar de adentro hacia fuera.

PRIORIDAD EN LAS OPERACIONES

Cuando efectuemos operaciones aritméticas o algebraicas debemos seguir el siguiente orden.

1. Potencias o exponentes.
2. Multiplicaciones y divisiones.
3. Sumas y restas.

Debe tenerse en cuenta que cuando hay signos de agrupación se debe desarrollar primero las operaciones que hay dentro de ellos.

Ejemplos:

1 2 x 4 + 7 **P**rimero se efectúa la multiplicación y luego la suma

2 x 4 + 7 = 8 + 7 = 15

2 2 (4 + 7) Primero se resuelve lo del paréntesis.
2 x (11) = 22

3 3 + 36 ÷ (24 – 3 x 2)
3 + 36 ÷ (24 – 6) = 3 + 36 ÷ (18) =3 + 2 = 5

Primero se resuelve la expresión entre paréntesis, empezando por la multiplicación de 3 x 2 = 6; luego la diferencia: 24 – 6 = 18, aquí queda resuelto el paréntesis, quedando: 3 + 36 ÷ 18; aquí, prima el ÷ sobre el +, por lo cual, se realiza primero la división 36 ÷ 18 = 2, reduciéndose la expresión a 3 + 2 cuyo resultado es 5.

4) 10 – 3{4 + 5[7-4(6 – 2)]} = 10 – 3{4 + 5[7- 4(4)]} = 10 – 3{4 + 5[7- 16]} =
10 – 3{4 + 5[- 9]} = 10 – 3{4 - 45} = 10 – 3{ - 41} = 10 + 123 = 133

5) $7-\frac{15}{3+2}=7-\frac{15}{5}=7-3=4$

6) $7-15\div(3+2)=7-15\div(5)=7-3=4$

7) $3^2*6+5=$

MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO m.c.m.

El mínimo común múltiplo entre dos o más números es el menor número que los contiene exactamente.

Cuando afirmamos que un número **a** contiene exactamente a un número **b** queremos decir que si dividimos el número **a** entre el número **b** el resultado será un número entero, sin decimales.

Ejemplo 1. Determine el m.c.m entre 2 y 4. La respuesta es 4, ya que si dividimos el 4 entre el 2 el resultado es 2 que es un número entero y si dividimos el 4 entre el 4 el resultado es 1 que es un número entero.

Ejemplo 2. Determine el m.c.m. entre 6 y 4, La RESPUESTA ES 12 ya que el 12 contiene 2 veces al número 6 y contiene 3 veces al número 4 y ambos son números enteros.

Ejemplo 3. Determine el m.c.m. entre 10, 50, 70, 14, 20. Ya no es tan fácil saber cuál es el m.c.m. de estos números; su cálculo requiere un método.

METODO PARA DETERMINAR EL m.c.m.

1. Factorizar o descomponer cada número como un producto de sus factores primos. Esto es dividir cada número primero por 2 luego por 3, por 5, por 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43,... que son los números primos.

2. El m.c.m. resulta de tomar los factores primos sin repetirlos, cada uno con su mayor exponente y multiplicarlos entre sí.

Retomando el ejemplo 3 podemos ver que el 10 es divisible sólo entre el 2 y el 5.

Por lo tanto, $10 = 2 \times 5$; así mismo, $70 = 2 \times 5 \times 7$; $50 = 2 \times 5^2$; $14 = 2 \times 7$; $20 = 2^2 \times 5$.

Podemos ver que los únicos factores de estos números son el 2, el 5 y el 7 también que el mayor exponente del 2 es el 2, del 5 es el 2 y del 7 es el 1.

Por lo tanto: $m.c.m = 2^2 \times 5^2 \times 7 = 4 \times 25 \times 7 = 700$.

Ejemplo 4. Determine el m.c.m. entre 36, 45, 40 y 6.

$36 = 2^2 \times 3^2$, $45 = 3^2 \times 5$, $40 = 2^3 \times 5$ y $6 = 2 \times 3$

Los únicos factores de estos números son el 2, el 3 y el 5. Y el mayor exponente de cada número es: del 2 es el 3, del 3 es el 2 y del 5 es el 1.

Por lo tanto: $m.c.m. = 2^3 \times 3^2 \times 5 = 8 \times 9 \times 5 = 360$

Ejemplo5: Determine el m.c.m. entre 44, 48, 66 y 18.

$44 = 2^2 \times 11$, $48 = 2^4 \times 3$, $66 = 2 \times 3 \times 11$, $18 = 2 \times 3^2$

$m.c.m = 2^4 \times 3^2 \times 11 = 16 \times 9 \times 11 = 1584$

TALLER

RESUELVA Y SIMPLIFIQUE SI ES POSIBLE:

1. – 3 + (- 5) R/: - 8
2. – 5 + 4 R/: - 1
3. 5 – (- 3) R/: 8
4. -3 – (- 2) R/: - 1
5. – 4 (-6) R/: 24

6. 3 (-2) R/: - 6
7. – 39 / 0
8. – 7 – 7
9. (- 3)(- 4)
10. – (- 4)
11. 0 / -5
12. – (- 8 + x)
13. 4 – {2 + 4[-2 + 3(8 – 6(3))]}
14. -2/12
15. 4/-2
16. 4 - 2 {5 +3[-5 - 4(3^3 – 6^2 (7))]}
17. (- 8) / (- 4)
18. 0/7
19. 2[-3(3) + 4(5)]
20. 0 (3/0)
21. 0(7 – x)
22. 0 * 0
23. 0 / 0

DETERMINE EL m.c.m.

1. 520, 156, 720. R: 9360.
2. 490, 2100, 504, 180. R: 88200.
3. 1050, 630, 112, 360. R: 25200
4. 1500, 1008, 315, 1225. R: 882000.

CONTESTE FALSO O VERDADERO, JUSTIFIQUE LAS RESPUESTAS FALSAS.

1. $(a-b)-c=a-(b-c)$
2. Todo número real tiene un recíproco.
3. $3/0=0$
4. El recíproco de −2/3 es 3/2.
5. Si $ab=0 \quad y \quad a\neq 0, \quad entonces \quad b=0$
6. El recíproco de 2/5 es 5/2.
7. $a-b=b-a$
8. El inverso aditivo de 5 es 1/5.
9. $a\div b=b\div a$
10. El inverso aditivo de -5 es 5.
11. Todo número real tiene inverso aditivo.
12. $b\div 0=b$.

EJERCICIOS RESUELTOS

Una dificultad recurrente en la solución de problemas numéricos consiste en plantearse un modelo matemático que resuelva la situación. A continuación se encuentra unos modelos de solución, base para resolver los ejercicios propuestos.

1. **COES COMERCIALIZADORA** está promocionando un artículo con un descuento del 25%. cuál es el precio de lista si se está vendiendo a $42.000 la unidad?

Aquí se da el valor del descuento: 25%, del cual se puede inferir que se está cobrando solamente el 75% [Recuerde que el todo es el 100%]. Entonces, los $42.000 que ha sido el precio de venta corresponde al 75% del precio de lista. Una **Regla de Tres Simple** resuelve el problema:

$42.000 ➔ 75%
X ➔ 100%
X = $42.000 * 100 / 75 = $56.000

2. La suma de Las edades de tres personas es de 85 años. Cuál es la edad de cada una, si la edad de la segunda es el doble de la primera y la tercera tiene 15 años menos que la segunda?

Aquí se plantea 3 incógnitas, 3 edades; debe asignárseles una letra a cada una; sea: X, Y, Z. Debe extraerse de la información las relaciones entre los valores de las 3 variables, así:

(1) *La suma de Las edades de tres personas es de 85* ➔ **X + Y + Z = 85**
(2) *La edad de la segunda es el doble de la primera* ➔ **Y = 2X**
(3) *La tercera tiene 15 años menos que la segunda* ➔ **Z – 15 = Y**

Cada relación genera una ecuación. Ahora, en la ecuación principal, la que contiene todas las variables, debe sustituirse los valores de dos de las variables en términos de la otra; así, si en la ecuación (2) Y = 2X, se remplaza el valor de Y en (1), quedando: (1) X + 2X + Z = 85; de esta forma se ha reducido la ecuación (1) a sólo dos variables: X, Z. Ahora debe hacerse lo mismo con la ecuación (3): Z – 15 = Y; pasando el 15 al lado derecho, éste cambia de signo y queda (3): Z = Y + 15; pero por la ecuación (2) se sabe que Y es igual a 2X, por lo tanto, la ecuación (3) queda así: Z = 2X + 15. Ahora ya se puede remplazar Z de la ecuación (3) en la ecuación (1), así:

X + 2X + Z = 85 → X + 2X + 2X + 15 = 85

Ahora hay que sumar los términos semejantes y agrupar los números a un lado de la igualdad, así:

5X + 15 = 85
5X = 85 – 15
5X = 70
X = **70/5**
X = 14

Ahora ya se conoce el valor de una de las variables, X = 14; remplazando el valor de X en la ecuación (2) Y = 2X, se encuentra el valor de Y, es decir, Y = 2 x 14 = 28; y de la ecuación (3) Z = Y + 15; es decir, Z = 28 + 15 = 43.

R: las edades son: 14, 28 y 43 años, que juntos suman 85 años.

3. La diferencia de los cuadrados de dos números consecutivos es de 31, hallar los números.

Dos números consecutivos se pueden conceptuar como X y (X + 1) y sus cuadrados serían $(X)^2$ y $(X + 1)^2$; así, las diferencias de sus cuadrados sería: $(X)^2 - (X + 1)^2$. La expresión $(X + 1)^2$ es un polinomio de grado 2, un binomio al cuadrado, un producto notable que se desarrolla así: "La primera cantidad al cuadrado + 2 veces la primera por la segunda + la segunda al cuadrado"; es decir, $(X + 1)^2 = X^2 + 2(X)(1) + (1)^2 = X^2 + 2X + 1$. Ahora se puede plantear la ecuación:

$(X)^2 - (X + 1)^2 = 31$; es decir,
$(X)^2 - (X^2 + 2X + 1) = 31$; es decir,
$X^2 - X^2 - 2X - 1 = 31$; la expresión $X^2 - X^2$ se cancela, porque es igual a cero
$- 2X - 1 = 31$
$- 2X = 31 + 1$
$- 2X = 32$
$X = 32 / -2$
$X = - 16$

Ahora ya se conoce el valor de una de las variables, X = - 16; su consecutivo (X + 1) será: (-16 + 1); esto es, -15, con lo cual, los números son -16 y -15.

Se puede confirmar el resultado: $(-16)^2 – (-15)^2 = 256 – 225 = 31$

4. Un fabricante vende un producto a $ 9.000 la unidad, tiene unos costos fijos de $2.000.000 y un costo variable de $ 7.000 por unidad producida.

   a.) A qué nivel de producción tendrá una utilidad de $ 5.800.000?
   b.) Hallar el nivel de producción en el punto de equilibrio
   c.) Cuál fue Su producción si obtuvo una pérdida de $ 1.500.000

Para resolver este ejercicio debe recordarse algunos conceptos básicos de Rentabilidad: (a) Teniendo el costo Fijo $(\boldsymbol{Cf})$, el Precio de Venta Unitario $(\boldsymbol{PVu})$ y el Costo de Venta Unitario $(\boldsymbol{CVu})$, la Utilidad *U* está dada por $(\boldsymbol{PVu})(\boldsymbol{X}) - \boldsymbol{Cf} - (\boldsymbol{CVu})(X)$; (b) Teniendo el costo Fijo $(\boldsymbol{Cf})$, el Precio de Venta Unitario $(\boldsymbol{PVu})$ y el Costo de Venta Unitario $(\boldsymbol{CVu})$, el Punto de Equilibrio en unidades $(\boldsymbol{P\varepsilon Q})$ está dado por el cociente: $\frac{\boldsymbol{Cf}}{\boldsymbol{PVu-CVu}}$.

$$(\boldsymbol{a})\ \boldsymbol{U} = (\boldsymbol{PVu})(\boldsymbol{X}) - \boldsymbol{Cf} - (\boldsymbol{CVu})(\boldsymbol{X})$$

$5.800.000 = $9.000(X) - $2.000.000 - $7.000(X)
$5.800.000 = $2.000(X) - $2.000.000
$5.800.000 + $2.000.000 = $2.000(X)
$7.800.000 = $2.000(X)
$7.800.000/$2.000 = X
3.900 = X
R/: Produciendo 3.900 unidades se obtiene una utilidad de $5.800.000

$$(\boldsymbol{b})\ \boldsymbol{P\varepsilon Q} = \frac{\boldsymbol{Cf}}{\boldsymbol{PVu-CVu}} = \frac{\$\boldsymbol{2.000.000}}{\$\boldsymbol{9.000}-\$\boldsymbol{7.000}} = \frac{\$\boldsymbol{2.000.000}}{\$\boldsymbol{2.000}} = \boldsymbol{1.000}$$

R/: Produciendo 1.000 unidades se obtiene el punto de equilibrio.

$$(\boldsymbol{c})\ \boldsymbol{U} = (\boldsymbol{PVu})(\boldsymbol{X}) - \boldsymbol{Cf} - (\boldsymbol{CVu})(\boldsymbol{X})$$

-$1.500.000 = $9.000(X) - $2.000.000 - $7.000(X)
-$1.500.000 = $2.000(X) - $2.000.000
-$1.500.000 + $2.000.000 = $2.000(X)
$500.000 = $2.000(X)
$500.000/$2.000 = X
250 = X
R/: Si se obtuvo una pérdida de $1.500.000, es porque la producción fue de 250 unidades

5 Hallar la base y la altura de un triángulo con área 2 metros cuadrados, si su base es 3 metros mayor que Su altura

En este tipo de ejercicio debe recordarse que el área de un triángulo se define B x h / 2 [Base por Altura dividido 2]. Del triángulo se conoce que (1) su base es 3 metros mayor que su altura; y (2) su área es 2 m^2

(1) B = h + 3
(2) B x h / 2 = 2 m^2

Remplazando B = h + 3 de la ecuación (1) en la (2), se tiene:

(h + 3) x h / 2 = 2 m^2, y:
(h^2 + 3h) / 2 = 2, y pasando el 2 de la izquierda a multiplicar,
(h^2 + 3h) = 4; pasando el 4 a la izquierda, se tiene:
h^2 + 3h - 4 = 0; una ecuación de segundo grado que se puede resolver por varios métodos; vamos a desarrollarla por dos de ellos: (a)La ecuación cuadrática, (b) por factorización

Por factorización

(h +) (h -) = 0; Se busca dos números que multiplicados den -4 y sumados den +3; estos son: +4 y -1
(h + 4) (h - 1) = 0; Se encuentran dos posibles soluciones:

(h + 4) = 0 ➔ **h = - 4;** Solución imposible, no hay distancias negativas
(h - 1) = 0 ➔ **h = +1;** Solución real, la altura del triángulo es 1 metro.

Con la cuadrática: $aX^2 + bX + C = 0$ ➔ [$1h^2 + 3h + (-4) = 0$]
A = 1; b = 3; c = -4

X = [- b ± √[b² – 4(a)(c)]] / 2(a)
X = [- 3 ± √[3² – 4(1)(-4)]] / 2(1)
X = [- 3 ± √[9 + 16]] / 2
X = [- 3 ± √[25]] / 2
X = [- 3 ± 5] / 2
X_1 = [- 3 - 5] / 2 = - 8 / 2 = - 4; Respuesta imposible
X_2 = [- 3 + 5] / 2 = 2 / 2 = **1**; Respuesta real **un metro**

Ahora, como la base (B) es 3 metros mayor, B = 1 + 3 = 4

EJERCICIOS PROPUESTOS

Para los siguientes problemas forma un modelo matemático y resuélvelo para darle solución al problema.

5. Un estudiante de la Universidad del Valle está cursando Matemática Financiera, asignatura que se califica con 4 evaluaciones de igual valor. Si las notas en las tres primeras pruebas fueron: 2.7, 2.0, y 3.6, ¿cuánto deberá sacar en la evaluación final para aprobar el curso?

6. Almacén Sport está en liquidación y anuncia que todos los precios de sus artículos fueron rebajados en un 40%. Si el precio actual de un artículo es de $30.000. ¿Cuánto valía este artículo antes de la liquidación?

7. El costo de producir un traje es de $ 360.000 y depende de la materia prima y de la mano de obra. Si el costo de la materia prima es el triple del costo de la mano de obra. ¿Cuál es el costo de cada uno de ellos?

8. Un padre tiene 39 años y Su hijo 15 años. ¿cuánto tiempo hace que la edad del padre era el triple de la edad de Su hijo?

9. El área de Un rectángulo es de 56 metros cuadrados y Su perímetro es de 30 metros. Hallar sus dimensiones.

10. En una familia de hermanos hay una niña más que niños, si se va un niño quedan dos veces más niñas que niños. ¿Cuántos niños y niñas hay?

11. Hace dos años John tenía cinco veces la edad de Pedro. Ahora es 8 años mayor que Pedro. Hallar ambas edades.

12. Una llave puede llenar Un tanque en 24 minutos y otra lo puede llenar en 18 minutos. ¿Cuánto tiempo demorarán las dos en llenarlo?

13. Hallar dos números enteros consecutivos tal que su suma se igual a 161.

14. El largo de un salón rectangular es 3 metros mayor que el ancho. Si Su perímetro es de 72 metros, hallar sus dimensiones.

15. Un fabricante vende un producto a $ 12.000 la unidad, tiene unos costos fijos de $3.600.000 y un costo variable de $ 9.000 por unidad producida.

    a) A qué nivel de producción tendrá una utilidad de $ 6.000.000?
    b) Hallar el nivel de producción en el punto de equilibrio
    c) Cuál fue Su producción si obtuvo una pérdida de $ 2.100.000

16. Al cambiar un cheque de $ 4.000.000. recibí billetes de $ 20.000 y de $ 50.000. Si recibí un total de 140 billetes. ¿Cuántos billetes recibí de cada uno?

17. Un hombre ha gastado 1/3 de Su dinero en golosinas y los 2/3 del resto en pasajes. Aún le quedan $2.500 pesos. ¿Cuánto dinero tenía?

18. Una empresa contrata a un empleado por 10 millones y un auto al año. Después de 8 meses, por renuncia, le da 2 millones y el auto. ¿Cuánto vale el auto?

19. Una epidemia destruye los 3/5 del ganado de una hacienda, si en la hacienda habían 30.000 cabezas, ¿Cuántas cabezas sobrevivieron?

20. El costo de Un producto al menudeo es de $ 5.400. Si se desea obtener una ganancia del 20% sobre el precio de venta, ¿A qué precio debe venderse el producto?

NÚMEROS FRACCIONARIOS

1. SUMA DE FRACCIONES DE IGUAL DENOMINADOR

FORMA GENERAL: se escribe el mismo denominador y se suman algebraicamente sus numeradores.

Ejemplos:

$$\frac{3}{5}+\frac{6}{5}=\frac{3+6}{5}=\frac{9}{5}$$

$$\frac{2}{3}+\frac{4}{3}-\frac{5}{3}=\frac{2+4-5}{3}=\frac{1}{3}$$

2. SUMA DE FRACCIONES CON DISTINTO DENOMINADOR

FORMA GENERAL. Sean $\frac{a}{b} y \frac{c}{d}$ fracciones irreducibles, entonces $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+cb}{bd}$

Ejemplos:

$$\frac{2}{7}+\frac{3}{5}=\frac{2\times 5+3\times 7}{7\times 5}=\frac{10+21}{35}=\frac{31}{35}$$

$$\frac{2}{3}+\frac{4}{5}-\frac{6}{7}=\frac{2\times5\times7+4\times3\times7-6\times5\times3}{3\times5\times7}=\frac{70+84-90}{105}=\frac{64}{105}$$

Regla General: Se halla el m.c.m. del denominador, se divide por cada denominador y se multiplica por Su respectivo numerador.

EJ. Efectuar, $\frac{2}{5}+\frac{3}{10}-\frac{5}{2}=$ 10 es el m.c.m entre 5, 10 y 2 entonces:

$$\frac{2}{5}+\frac{3}{10}-\frac{5}{2}=\frac{2*2+3*1-5*5}{10}=\frac{4+3-25}{10}=\frac{-18}{10}=-\frac{18}{10}$$

Resolver: 1) $\frac{2}{9}-\frac{4}{9}+\frac{7}{9}$; 2) $\frac{3}{5}-\frac{6}{3}+\frac{4}{20}$; 3) $\frac{5}{10}-\frac{6}{10}$;

4) $\frac{1}{6}-\frac{3}{7}$; 5) $\frac{2}{8}-\frac{1}{4}$; 6) $\frac{3}{5}+\frac{9}{2}-\frac{5}{2}$

3. PRODUCTO DE FRACCIONES : Sean $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ fracciones irreducibles, entonces Su producto está definido como: $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}=\frac{ac}{bd}$, Es decir numeradores entre si y denominadores entre sí.

Ejemplos: Hallar el producto de $\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}$ ➔ $\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}=\frac{2\times3}{3\times5}=\frac{6}{15}$

Hallar el producto de $\frac{4}{5}\times\frac{3}{2}\times\frac{5}{3}$ ➔ $\frac{4}{5}\times\frac{3}{2}\times\frac{5}{3}=\frac{4\times3\times5}{5\times2\times3}=\frac{60}{30}=2$

NOTA: El producto de un entero por una fracción y viceversa, sigue la misma ley:

Ejemplos: $3\times\frac{4}{5}=\frac{3\times4}{5}=\frac{12}{5}$; $\frac{5}{3}\times4=\frac{5\times4}{3}=\frac{20}{3}$

4. DIVISIÓN DE FRACCIONES: La división de fracciones se convierte en un producto, invirtiendo el divisor y aplicando la ley del producto de fracciones:

Sean $\frac{a}{b} y \frac{c}{d}$ fracciones

Llamemos $\frac{a}{b}$ *dividendo* y $\frac{c}{d}$ *divisor, entonces* $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

Ejemplo: $\frac{3}{2} \div \frac{4}{3} = \frac{3}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3 \times 3}{2 \times 4} = \frac{9}{8}$

NOTA: La división de un entero por una fracción y viceversa, sigue la misma ley.

Ejemplo: $5 \div \frac{2}{3} = 5 \times \frac{3}{2} = \frac{15}{2}$

$$\frac{4}{2} \div 3 = \frac{4}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Realice los siguientes ejercicios; 1. $\frac{2}{9} \times 3 \times \frac{5}{2}$: 2. $\frac{3}{5} \div 3$

3. $5 \div \frac{2}{3}$; 4. $8 \div \frac{5}{2}$; 5. $9 \div \frac{4}{7}$

Ejercicios y problemas sobre fracciones.

A. Efectuar y simplificar:

1). $\left[\left(\frac{1+\frac{3}{5}}{2-\frac{4}{3}} \right) \div \left(\frac{4-\frac{1}{2}}{3+\frac{1}{2}} \right) \right] \times \left(\frac{\frac{4}{5}}{\frac{5}{4}} \right)$ 2) $2 + \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}$ 3) $\frac{\frac{4}{6}}{7} + \frac{\frac{2}{3}}{5}$

B. Resolver

1. Que parte de 20 es 5?
2. Si tengo \$60.000 y me gasto \$18.000. Que fracción de dinero me gaste?
3. Tenía \$90.000. Si preste los 3/5 y me gaste los 5/6 del resto. Cuánto dinero me quedó?
4. Un obrero cotiza una obra por \$560.000 y hace los 4/7 de ella. Cuánto dinero recibe y cuánto le falta por cobrar?
5. Un padre deja al morir \$ 450.000.000 para repartir entre sus tres hijos así: Para el mayor 2/9 de la herencia. El menor 1/5 parte de la anterior y el resto para el tercero. Cuánto dinero recibe cada uno?
6. Cuál es el número cuyos dos quintos equivalen a 50.
7. Si la edad de Enrique es los 5/6 de la edad de Juan y 4/5 de la edad de Juan equivalen a 24 años. Hallar ambas edades.
8. La edad de Pedro es 1/7 de la edad de Juan y ambas edades suman 24 años. Hallar sus edades.
9. Si recorro los 3/8 de un camino y aun me faltan 40 km. Cuánto he recorrido y cuanto me falta por recorrer?
10. Si 1/5 de los alumnos de UNIREMINGTON están en clase, 2/9 están en descanso y los 390 restantes están en el comedor. Cuantos alumnos hay en la U?
11. Ayer me gaste los 3/7 de mi dinero y hoy me gaste los 3/8 del resto y aun me quedan \$10.000. Cuánto dinero tenía al principio?

12. Hugo hace un trabajo en 5 días y Paco lo hace en 8 días. Cuantos días se demoraran haciendo el trabajo juntos?

13. Un tanque de agua se puede llenar con tres llaves así: La primera lo puede llenar en 5 horas, la segunda lo llena en 10 horas y la tercera en tres horas. En cuánto tiempo lo llenan las tres si se abren al mismo tiempo?

14. Un hombre ha gastado 1/3 de Su dinero y los dos tercios del resto. Aún le quedan \$12.000. Cuánto dinero tenia?

15. Si el producto : $\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{4} \times \frac{6}{5} \times \ldots\ldots \frac{a}{b} = 9 \quad \textit{cual es la suma de a y b?}$

16. Que prefieres recibir: Una de las 8 partes iguales de 5 quesos ó 5 de las 8 partes iguales de un queso?

Sea un número real x. Si se multiplica por sí mismo se obtiene $x \cdot x$. Si este resultado se multiplica nuevamente por x resulta $x \cdot x \cdot x$. De manera sucesiva, si x se multiplica por si misma n veces, se obtiene: $\underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n\ veces}$

Este tipo de expresiones se puede simplificar usando una notación abreviada, así:

$x . x = X^2$

$x . x . x = X^3$

$x . x . x . x = X^4$

$x . x . x . x . x = X^5$

$$\underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \ldots\ldots x}_{} = X^n$$

y, en términos generales:

Donde x es llamada *base* y el número n escrito arriba a su derecha, es llamado *exponente*. El exponente indica el número de veces que se multiplica la base.

Para n entero, se tiene que $X^{-n} = \frac{1}{X^n}$, $X \neq 0$; entonces si tenemos $X^{-2} = \frac{1}{X^2}$, de la misma forma si tenemos $X^n = \frac{1}{X^{-n}}$, $X \neq 0$; lo cual nos permite convertir una base de exponente negativo a exponente positivo y viceversa.

PRODUCTO DE POTENCIAS DE IGUAL BASE

Si tenemos $X^2 \cdot X^3$, observemos que sería: $X^2 = X \cdot X$, y $X^3 = X \cdot X \cdot X$
Cuyo producto sería: $X^2 \cdot X^3 = \underbrace{X \cdot X}_{2\ veces} \cdot \underbrace{X \cdot X \cdot X}_{3\ veces} = X^5$ que equivale a sumar sus exponentes algebraicamente.

En conclusión se puede afirmar que: "Para multiplicar potencias de igual base; escribimos la misma base y sumamos los exponentes algebraicamente: Ejemplos.
Hallar los siguientes productos: (a) 3^2 x 3^5, (b) 2^{-1} x 2^{-4}, (c) b^5 x b^{-2}.

(a) 3^2 x 3^5 = 3^{2+5} = 3^8 = 6.561

(b) $2^{-1} \times 2^{-4} = 2^{-1+(-4)} = 2^{-5} = 1/2^{-5} = 1/32 = 0{,}03125$

(c) $b^5 \times b^{-2} = b^{5-2} = b^3$

DIVISIÓN DE POTENCIAS DE IGUAL BASE

Si se tiene $\frac{x^4}{x^2} = \frac{x \cdot x \cdot x \cdot x}{x \cdot x} = \frac{x \cdot x}{x \cdot x} \cdot x \cdot x = 1 \cdot x \cdot x = x^2$

Si observamos el resultado de la división $\frac{x^4}{x^2} = x^2$, lo que equivale a escribir la misma base X y al exponente del numerador, "Restarle" el exponente del denominador, es decir: $\frac{x^4}{x^2} = x^{4-2} = x^2$;

Enunciamos que: Para dividir potencias de igual base, se escribe la misma base y al exponente del numerador, le restamos el exponente del denominador.

Si tenemos X^0, se puede decir que esto es igual a uno (1). Siempre que X sea diferente de cero (0), Porque tendríamos que el exponente 0 proviene de dividir una cantidad por sí misma. Ej: $\frac{2}{2} = 1$, por lo tanto $\frac{x}{x} = 1$; con lo que estaríamos diciendo que el exponente cero, proviene de dividir una cantidad por sí misma.

Ejemplos: Simplificar:

$$\begin{cases} 1) \ \dfrac{3^5}{3^3} = 3^{5-3} = 3^2 \\ 2) \ \dfrac{x^{-2}}{x^3} = x^{-2-3} = x^{-5} \\ 3) \ \dfrac{2^{-1}}{2^{-2}} = 2^{-1-(-2)} = 2^{-1+2} = 2 \end{cases}$$

POTENCIA DE UNA POTENCIA.

Si tenemos $\left(X^{m} \right)^{n}$ equivale a tener (X) $^{m \times n}$, entonces, para elevar una potencia a un exponente, se multiplican algebraicamente los exponentes, así:

1) $\left(2^{3} \right)^{2} = 2^{3 \times 2} = 2^{6}$

2) $\left(4^{3} \right)^{-2} = 4^{(3) \times (-2)} = 4^{-6} = \dfrac{1}{4^{6}}$

POTENCIA DE UN PRODUCTO DE DIFERENTE BASE

Si tenemos $(X \cdot Y)^n = X^n \cdot Y^n$, entonces, la potenciación en un producto de bases diferentes, es distributiva, y es asociativa si el exponente es igual, así:

1) $(4 \cdot 3)^2 = 4^2 \cdot 3^2$
2) $(m^2 \cdot n^3)^2 = m^{2 \times 2} \cdot n^{3 \times 2} = m^4 \cdot n^6$

POTENCIA DE UN COCIENTE DE DIFERENTE BASE

Si tenemos $\left(\dfrac{X}{Y} \right)^{n} = \dfrac{X^{n}}{Y^{n}}$, lo que quiere decir que la potenciación en la división de bases diferentes es distributiva y es asociativa...

Ejemplos:

1) $\left(\dfrac{5}{7} \right)^{3} = \dfrac{5^{3}}{7^{3}}$

2) $\left(\dfrac{p}{q} \right)^{-2} = \dfrac{p^{-2}}{q^{-2}} = \dfrac{\dfrac{1}{p^{2}}}{\dfrac{1}{q^{2}}} = \dfrac{1}{p^{2}} \times \dfrac{q^{2}}{1} = \dfrac{q^{2}}{p^{2}}$

EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

Simplifique completamente y en su respuesta evite exponentes negativos.

$$1)\quad (3^{-1})\cdot(3^{-2}) \quad ; \quad 2)\quad 2^{3}\cdot 2^{-1} \quad ; \quad 3)\quad \left(\frac{x^{2}}{y^{-1}}\right)^{3} \quad ; \quad 4)\quad \left(\frac{w^{-1}s^{-2}}{w\ s}\right)^{-1}$$

$$5)\quad 4X^{-1}\cdot 2X^{-2} \quad ; \quad 6)\quad \frac{\left(3^{-1}\cdot X^{-3}\right)^{2}}{X^{-1}\cdot Z^{2}} \quad ; \quad 7)\quad \frac{2^{-1}+2}{2-2^{-1}}$$

$$8)\quad \frac{p\cdot(p^{-1})}{p^{-1}\cdot p^{2}} \quad ; \quad 9)\quad \frac{-Z^{-1}\cdot Z}{Z+Z^{-1}} \quad ; \quad 10)\ \frac{3^{2}\cdot 2^{2}}{2^{3}\cdot 3}$$

EXPONENTES FRACCIONARIOS

Un exponente fraccionario irreducible significa que proviene de una raíz inexacta, donde el denominador proviene del índice de la raíz, y el numerador es el exponente de la cantidad subradical.

Ejemplo. $\sqrt[n]{X^{m}}$ *significa* $X^{\frac{m}{n}}$; La cual existe en los números si X es positiva, y si X es negativa (n) debe ser impar.

En general $\sqrt[n]{X^{m}}$ *es* $\left[\begin{array}{l} positiva\ para\ X\ positiva. \\ negativa\ para\ X\ negativa\ y\,(n)\,impar. \end{array}\right.$

Así tenemos:

$$\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{2^{3}}=2^{3/3}=2$$
$$\sqrt[3]{-8}=-\sqrt[3]{8}=-\sqrt[3]{2^{3}}=-2^{3/3}=-2$$

Otros ejemplos. Simplifique:

$$1)\quad \sqrt{9Z^{4}}=\sqrt{3^{2}\cdot Z^{4}}=3^{\frac{2}{2}}\cdot Z^{\frac{4}{2}}=3Z^{2}$$
$$2)\quad \sqrt[3]{X^{2}\cdot Y}=(X^{2}Y)^{1/3}=X^{2/3}Y^{1/3}$$

En los ejemplos se observa que se pueden expresar cantidades sin el signo $\sqrt{\ }$

Dividiendo los exponentes de Las cantidades subradicales, por el índice de la raíz; de la misma forma podemos expresar cantidades con exponentes fraccionarios, con el símbolo $\sqrt{\ }$.

Ejemplo:

Expresar con el símbolo de raíz

1) $3^{2/5} = \sqrt[5]{3^2}$

2) $2X^{1/2} = 2\sqrt{X}$

3) $\left(a^2 + b^2 \right)^{1/2} = \sqrt{a^2 + b^2}$

PROPIEDADES DE LA RADICACIÓN

1) $X^{1/n} = \sqrt[n]{X}$ *Definición de exponente fraccionario.*

2) $\sqrt[n]{X \cdot Y} = \sqrt[n]{X} \cdot \sqrt[n]{Y}$ *La radicación es distributiva en el producto.*

3) $\sqrt[n]{\dfrac{X}{Y}} = \dfrac{\sqrt[n]{X}}{\sqrt[n]{Y}}$ *La radicación es distributiva en el cociente.*

4) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{X}} = \sqrt[m \times n]{X}$ *Para extraerle la raíz a una raíz, se halla el producto de los indices y se colocan como índice de una raíz con la misma cantidad subrradical.*

5) $\sqrt[m]{X^m} = \left(\sqrt[m]{X} \right)^m = X$ *Cuando el índice y el exponente de una raíz son iguales, el resultado es igual a la cantidad subradical.*

Ejemplos de estas cinco propiedades.

1) $3^{2/3} = \sqrt[3]{3^2}$

2) $\sqrt{9 \times 25} = \sqrt{9} \times \sqrt{25} = 3 \times 5 = 15$: Distributividad del producto en la radicación.

3) $\sqrt{\dfrac{49}{36}} = \dfrac{\sqrt{49}}{\sqrt{36}} = \dfrac{7}{6}$: Distributividad del cociente en la radicación.

4) $\sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[2 \times 2]{2} = \sqrt[4]{2}$: Raíz de una raíz.

5) $\sqrt[4]{3^4} = \left(\sqrt[4]{3}\right)^4 = 3$: Cuando el índice y el exponente son iguales, el resultado es la cantidad subradical

NOTA: La radicación NO es distributiva en la suma ni en la resta.

EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

Escriba Las siguientes formas exponenciales en forma de raíz.

1) $\left(2X-1\right)^{1/3}$; 2) $m^{-2/3}$; 3) $x^{-2/5} - y^{-2/5}$; 4) $\sqrt{\left(a-y\right)^{1/2}}$; 5) $\sqrt[3]{\sqrt{y}}$

Escriba Las siguientes expresiones radicales en forma exponencial.

1) $\sqrt[3]{y^2}$; 2) $\sqrt[4]{x^2 n^3}$; 3) $\sqrt{a^2+b^2}$; 4) $\sqrt{\left(a-y\right)^{1/2}}$; 5) $\sqrt[3]{\sqrt{y}}$

Simplifique las siguientes expresiones.

1) $\sqrt[5]{-32}$; 2) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{16}}$; 3) $100^{1/2}$; 4) $64^{1/3}$; 5) $\left(\dfrac{27y^3}{8}\right)^{2/3}$

6) $\sqrt[4]{\dfrac{x}{16}}$; 7) $\sqrt[3]{\left(\dfrac{1000}{a^9}\right)^{-21}}$; 8) $\left(16y^8\right)^{3/4}$; 9) $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$;

10) $2\sqrt{75} - 4\sqrt{27} + \sqrt[3]{128}$

PROBLEMAS PROPUESTOS PARA OBTENER EL MODELO Y DARLES LA SOLUCIÓN REQUERIDA POR EL PROBLEMA

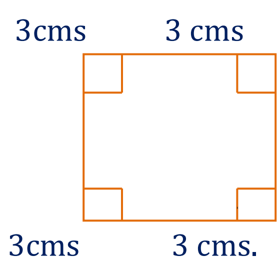
A continuación se encuentra una serie de problemas para construir el modelo matemático y obtener la solución.

1 $100 millones deben distribuirse en partes iguales entre cierto número de personas. Pero en el momento de la repartición faltan cinco de ellas, lo que permite darle $ 1 millón más a Las otras. ¿Cuántas personas había al principio?

2. Cuál es la edad de Juan, sabiendo que el cuadrado de ella es igual a 16 veces la edad que tendrá dentro de 12 años.

3. La suma de dos números es 9 y la suma de sus cuadrados es 53; Hallar los números.

4. Una compañía está diseñando un empaque para Su producto. El empaque será una caja sin tapa construida de una lámina cuadrada de aluminio, recortando cuadrados en sus extremos de 3 cms. y doblando luego hacia arriba. La caja debe contener un volumen de 75 cms. cúbicos. Hallar Las dimensiones de la hoja de aluminio que se debe utilizar para alcanzar ese volumen.



5. La hipotenusa de un triángulo rectángulo es 10 cm más larga que uno de los catetos y ese cateto es 10 cm más largo que el otro. Encuentre los tres lados de ese Triángulo rectángulo.

6. Si un campo de juego cuadrado tiene una longitud en Su diagonal de 100 m, encuentre el área del campo.

LA LINEA RECTA O MODELO LINEAL

ECUACIÓN O MODELO DE LA LÍNEA RECTA: Es una ecuación que relaciona dos variables, por lo general a las variables se les asigna las letras **x** e **y**; Una ecuación lineal cumple con las siguientes características:

1. El máximo exponente de la variable **x** es uno, esta es la variable independiente y otras letras que se utilizan para la variable independiente son: **q, t, z.**
2. El máximo exponente de la variable **y** es uno, esta es la variable dependiente.
3. Su gráfica es una línea recta.
4. Para hacer la gráfica es suficiente con conocer dos puntos sobre la línea recta.

ECUACIONES DE LA LÍNEA RECTA.

La línea recta tiene diferentes presentaciones, todas equivalentes. Veamos algunas de ellas.

1. **Ecuación general de la línea recta**. En esta ecuación que esta igualado a cero. Presenta la siguiente forma:

$$Ax + By + C = 0$$

Donde: A, B, C son números cualquiera.

Ejemplo:

$5x - 6y + 7 = 0$

$8x + 6y = 0$

$-3x + 7 = 0$

2. **Ecuación intercepto pendiente de la línea recta**. Esta ecuación resulta de despejar **y** de la ecuación anterior. Presenta la siguiente forma:

$$y = m x + b$$

Dónde:

m :

Es la pendiente de la línea recta. La pendiente da información a cerca del grado de inclinación de la línea recta con respecto al eje **x.**

$m > 0$. El ángulo de inclinación es menor de 90 grados.

$m < 0$. El ángulo de inclinación es mayor de 90 grados.

$m = 0$. El ángulo de inclinación es de 0 grados. En este caso la ecuación queda: y=b.

m No existe. El ángulo de inclinación es de 90 grados. En este caso la ecuación queda x=a.

b :

Es el intercepto de la línea recta con el eje **y**. Es el punto donde la recta corta el eje **y.**

Ejemplo:

$y = 2x + 5. \quad m = 2, \quad b = 5.$

Determine el intercepto y la pendiente de cada uno de los ejemplos anteriores.

3. **Ecuación punto pendiente de la línea recta**. Con esta ecuación se obtiene las ecuaciones anteriores. Presenta la siguiente forma:

$$y - y_0 = m (x - x_0)$$

Dónde:

(x_0, y_0) : Son las coordenadas de un punto conocido sobre la línea recta.

m : Es la pendiente de la línea recta.

GRÁFICA: Para graficar un modelo lineal es suficiente con dos puntos, los paso a seguir son:

1. Lleve el modelo a la forma intercepto pendiente.
2. Se seleccionan dos valores de **x** arbitrariamente
3. Cada valor de **x** seleccionado se reemplaza en el modelo para obtener la respectiva **y**.
4. Las parejas obtenidas se ubican en el plano cartesiano.
5. Unimos los dos puntos obtenidos mediante una línea recta.

Ejemplos: Grafique cada una de las siguientes ecuaciones lineales, identifique además la pendiente en cada caso.

1. $2y-6x+10=0$.

   Seleccionamos dos valores de **x** (los que nosotros queramos) por ejemplo x=0 y x=4, con estos valores obtenemos la respectiva **y** remplazando en la ecuación.
   Para $x=0, \quad y=3(0)-5=-5$.
   Este punto tiene coordenadas (0, -5).
   Para $x=4, \quad y=3(4)-5=12-5=7$.
   Este punto tiene coordenadas (4,7).
   Haciendo una tabla de valores queda.

x	0	4
y	-5	7

Ubicamos estos dos puntos en el plano cartesiano y los unimos mediante una línea recta. La gráfica se muestra en la figura 1.

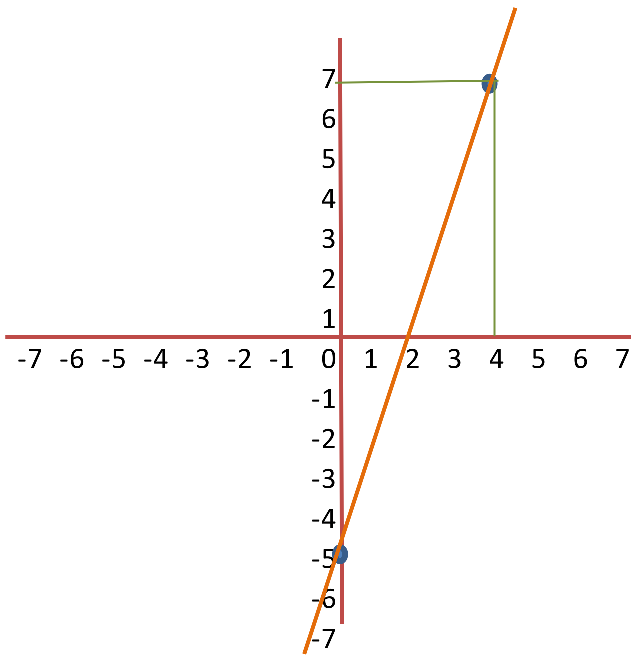


FIGURA 1. Gráfica de $y = f(x) = 3x - 5$

2. $y = -4x + 10$

Sí $x = 2 \quad y = f(2) = -4(2) + 10 = -8 + 10 = 2$.

Sí

X	2	5
Y	2	-10

$x = 5 \quad y = f(5) = -4(5) + 10 = -20 + 10 = -10$.

La gráfica se muestra en la figura 2.

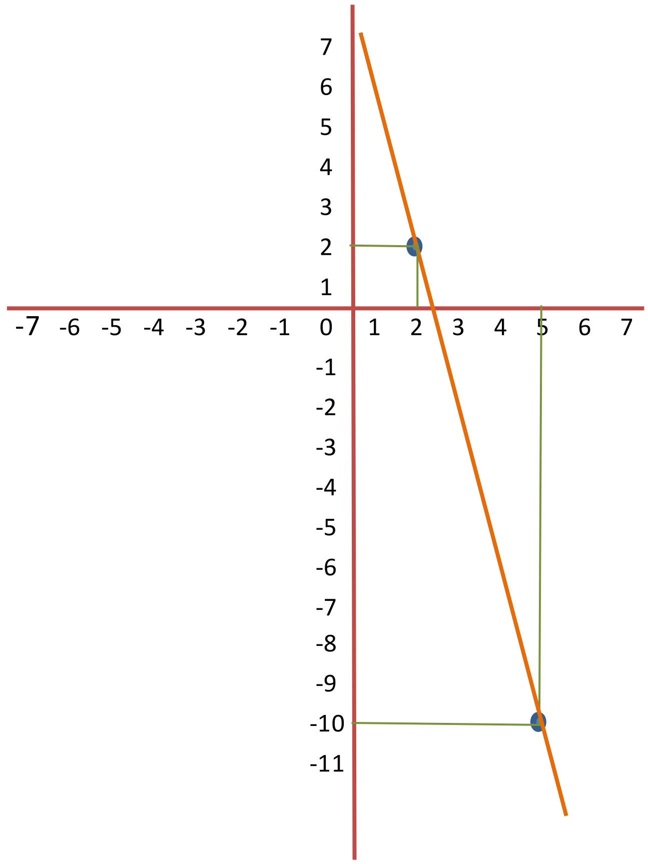


FIGURA 2 Gráfica de $y = f(x) = -4x + 10$

MÁS SOBRE EL MODELO LINEAL.

1. CON LA ECUACIÓN PUNTO PENDIENTE

Algunas veces el modelo lineal no es conocido, por lo tanto debemos construirlo, naturalmente nos deben dar la información suficiente para ello. Una de las formas de construirlo es utilizando la ecuación punto pendiente del modelo lineal, dicha ecuación es la siguiente: $y - y_0 = m(x - x_0)$.

Donde como ya se anotó, m es la pendiente de la línea recta y (x_0, y_0) son las coordenadas de un punto sobre la línea recta; Dichos valores son conocidos.

PROCEDIMIENTO:

- Remplace el punto y la pendiente en la ecuación punto pendiente.
- Efectúe operaciones.
- Despeje la variable dependiente (que por lo general le asignamos la letra y).

Ejemplos:

Encuentre el modelo matemático lineal que cumple con las siguientes características, (lo que es lo mismo encuentre la ecuación de la línea recta):

1. Pasa por el punto de coordenadas (1,3) y tiene pendiente igual a –2.

Los datos del ejemplo son:

$x_0 = 1, \quad y_0 = 3, \quad m = -2$. El primer valor del punto siempre corresponde a la variable independiente (en este caso a la **x**) y el segundo valor corresponde a la variable dependiente (en este caso: y).

Con estos datos y con la ecuación punto pendiente se determina el modelo lineal pedido.

$$y - 3 = -2(x-1) \rightarrow y - 3 = -2x + 2 \rightarrow y = -2x + 2 + 3$$
$$y = -2x + 5$$

Que es el modelo pedido. Ahora se puede confeccionar la gráfica.

2. Pasa por el punto de coordenadas (-2,5) y tiene pendiente igual a 3/2.

Los datos son:

$$x_0 = -2, \quad y_0 = 5, \quad m = 3/2$$
$$y - 5 = 3/2 \left[\quad x - (-2) \right] \rightarrow y - 5 = \frac{3}{2}x + 3$$
$$y = \frac{3}{2}x + 3 + 5 \rightarrow y = \frac{3}{2}x + 8$$

Queda como ejercicio efectuar la gráfica.

3. Se tiene la siguiente información de un modelo lineal: La pendiente es –2 y pasa por el punto de coordenadas (3,5). Determine:

a. El modelo lineal.
b. Los interceptos.
c. Grafique incluya los interceptos en la gráfica.

2. CONOCIDOS DOS PUNTOS DE COORDENADAS: $\left(x_0, y_0\right) \wedge \left(x_1, y_1\right)$. SOBRE LA LÍNEA RECTA

- Hallamos la pendiente de la recta, utilizando la ecuación de la pendiente:

$$m = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} \quad ó \quad m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

- Con la pendiente y cualquiera de los dos puntos anteriores determinamos el modelo lineal, utilizando la ecuación punto pendiente de la línea recta.

Ejemplo:

Encuentre la ecuación de la recta que pasa por los puntos de coordenadas (3,2) y (5,1). Grafique el modelo.

Los datos para determinar la pendiente son:

$x_0 = 3, \quad y_0 = 2, \quad x_1 = 5, \quad y_1 = 1$ ó también

$x_0 = 5, \quad y_0 = 1, \quad x_1 = 3, \quad y_1 = 2$

$$m = \frac{2-1}{3-5} = \frac{1}{-2} \rightarrow m = -\frac{1}{2}$$

Los datos para determinar el modelo lineal son:

$m = -\frac{1}{2}, \quad x_0 = 3, \quad y_0 = 2$

$$y - 2 = -\frac{1}{2}\left(x - 3\right) \rightarrow y - 2 = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} + 2$$

$y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$ Que es el modelo matemático o ecuación lineal pedida.

3. CONOCIDO UN PUNTO DE COORDENADAS (x_0, y_0) SOBRE LA LÍNEA RECTA Y LA CONDICIÓN QUE LA RECTA CUYO MODELO SE DESEA BUSCAR ES PARALELA O PERPENDICULAR A UNA RECTA CUYO MODELO ES CONOCIDO.

- Encontramos la pendiente de la recta cuyo modelo es conocido. Para ello llevamos el modelo a la forma intercepto pendiente; esto es despejamos la **y**, el número que acompañe a la **x** es la pendiente.

- Dos o más rectas son paralelas si se cumple que tienen la misma pendiente.

Rectas Paralelas: $m1 = m_2 = m$

Si las rectas son paralelas tomamos la misma pendiente.

- Dos rectas son perpendiculares si el producto de sus pendientes es igual a menos uno.

Rectas Perpendiculares: $m1 * m_2 = -1$

La pendiente que se busca se obtiene como menos uno dividido la pendiente conocida.

- Utilice la ecuación punto pendiente para determinar la ecuación de la línea recta.

Ejemplos:

1. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto de coordenadas (-1,5) y que es perpendicular a la recta de ecuación es 2y-4x=6. Grafique ambas rectas sobre un mismo plano cartesiano.

Solo conocemos las coordenadas del punto, debemos encontrar la pendiente, tenemos como información que la recta pedida es perpendicular a la recta cuya ecuación o modelo es conocido.

Para encontrar la pendiente de la recta perpendicular debemos despejar la **y** en la ecuación conocida y el número que acompañe a la **x** es la:

$$2y-4x=6\rightarrow 2y=4x+6\rightarrow y=\frac{4x+6}{2}\rightarrow y=\frac{4x}{2}+\frac{6}{2}$$

$$y=2x+3\rightarrow m_1=2$$

Para hallar la pendiente de la recta cuya ecuación deseamos buscar aprovechamos la condición que si dos rectas son perpendiculares el producto de sus pendientes es igual a menos uno y despejamos la pendiente buscada.

Sea m_2 la pendiente de la recta buscada, sabemos que $m_1=2$, entonces:

$$2*m_2=-1\rightarrow m_2=-\frac{1}{2}$$

Para hallar la ecuación o modelo lineal pedido tenemos, la siguiente información:

$$x_0=-1,\quad y_0=5,\quad m=-\frac{1}{2}$$

$$y-5=-\frac{1}{2}\left[\ x-(-1)\right]$$

$$y=-\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}\quad \text{Ecuación o modelo lineal pedido.}$$

Debemos graficar sobre un mismo plano cartesiano los siguientes modelos lineales:

$$y=2x+3\quad\wedge\quad y=-\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}$$

Ejercicio: efectuar las gráficas.

2. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto de coordenadas (3,3) y es paralela a la recta cuya ecuación es y = 5x+2. Grafique.

Como son rectas paralelas tienen la misma pendiente. La pendiente de la recta dada es el número que acompaña a la **x** después de haber despejado la **y**; como ya la **y** esta despejada podemos ver que la pendiente es 5.

Los datos para hallar la ecuación son:

$$x_0=3,\quad y_0=3,\quad m=5$$

$$y-3=5\left(\ x-3\right)$$

$y=5x-12$ Es la ecuación pedida.

CAPITULO 2

Introducción a la Matemática Financiera

La Matemática Financiera es el conjunto de conceptos, técnicas y ecuaciones que permiten evaluar y comparar alternativas de inversión, financiación y operación.

EN ESTE CAPÍTULO

El Dinero

- Valor del Dinero en el Tiempo
- Equivalencia del Dinero en el Tiempo

El Interés

- Concepto de Interés
- Interés Simple
- Interés Compuesto

las Tasas de Interés

- Expresión de las tasas de interés
- Notación decimal
- Notación porcentual
- Conversión

Valor Presente y Valor Futuro

- Valor Presente
- Valor Futuro

MATEMÁTICA FINANCIERA

CONCEPTO:

La Matemática Financiera es el conjunto de conceptos, técnicas y ecuaciones que permiten evaluar y comparar alternativas de inversión, financiación y operación.

Como Herramienta Financiera es útil para:

- → Determinar el costo de una alternativa de financiación.
- → Determinar la rentabilidad de una inversión.
- → Establecer planes de financiación cuando se vende a crédito a los clientes.
- → Seleccionar el mejor plan para amortizar deudas.
- → Calcular el Costo de Capital.
- → Establecer políticas de descuentos en cartera.
- → Realizar Análisis de costos en el área productiva.
- → Analizar el Remplazo de equipo sólo con el estudio de costos.
- → Analizar el Remplazo de equipo involucrando ingresos e impuestos.
- → Decidir sobre la Creación de plantas totalmente nuevas.
- → Realizar Análisis inflacionario.
- → Tomar decisiones económicas bajo riesgo.

La Ingeniería Económica permite responder desde el punto de vista financiero preguntas como:

- ¿Lograremos el retorno requerido si instalamos esta nueva tecnología de fabricación en la planta?

- ¿Se debería construir o arrendar las instalaciones para la nueva sucursal?

- ¿Es mejor fabricar internamente o comprar por fuera una parte componente de una nueva línea de producto?

- ¿Debe la Corporación Universitaria Rémington alquilar una locación física para compartir con la Escuela Americana de Negocios o debería comprarla?

EL DINERO

El dinero es un medio de pago por el cual se logran realizar transacciones o intercambios de bienes y/o servicios, remplazando al procedimiento de trueque de los mismos, y de paso agilizando y facilitando las mencionadas transacciones.

Un individuo que posea dinero líquido está en capacidad de comprar lo que encuentre más apropiado para su bienestar, mientras que un individuo que haya invertido su dinero en un bien o en un servicio ya no tiene la capacidad de comprar lo que desee, ya tiene lo que deseaba cuando tenía el dinero en su poder.

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DEL SISTEMA FINANCIERO:

1. *El dinero cambia de valor con el tiempo*
2. *Existe **equivalencia** del dinero en el momento presente con el dinero en un momento futuro.*

EL VALOR DEL DINERO EN EL TIEMPO

- El principio fundamental del sistema capitalista (Financiero) establece que el dinero debe producir más dinero a través del tiempo, es decir, generar más valor. El dinero es un producto que se arrienda. Por eso, un peso de hoy no es lo mismo que un peso de mañana, por lo tanto, <u>no se debe sumar valores en diferentes tiempos.</u>

- Preferiría usted recibir $100.000 hoy o dentro de un año?

Es posible que lo desee hoy y no dentro de un año, debido entre otros a factores tales como:

– La inflación, hace que dentro de un año ese dinero tenga menor poder adquisitivo, es decir se desvalorice.

– Por tanto, usted buscaría la oportunidad de invertirlos en alguna actividad, haciendo que no sólo se protejan de la inflación, sino que también generen una utilidad adicional.

– El riesgo de que quien se los deba entregar ya no esté en condiciones de hacerlo.

Preferiría usted recibir $100.000 hoy o $1.000.000 dentro de un año?

Es posible que desee recibir un millón, debido entre otros a factores tales como:

– $1.000.000 dentro de un año representa mucho más valor que $100.000 hoy, siempre y cuando exista un seguro de la deuda.

– La inflación no es una preocupación ya que el incremento de cien mil a un millón es extremadamente grande y la inflación en un año no llegará a tal crecimiento (mil por ciento).

- El valor del dinero depende del punto del tiempo en donde esté ubicado.

- Por lo tanto, si la opción fuera recibir su dinero dentro de un año, usted la aceptaría solamente si le entregan una cantidad adicional que compense los riesgos de esperar.

El dinero tiene diferente valor en el tiempo debido precisamente al interés que genera; por lo tanto no es correcto comparar, sumar o restar montos que tengan diferente ubicación en el tiempo; solo se pueden operar cifras que estén ubicadas en el mismo momento.

EQUIVALENCIA DEL DINERO EN EL TIEMPO

- El dinero tiene diferente valor en el tiempo debido precisamente al interés que genera; por lo tanto no es correcto comparar, sumar o restar montos que tengan diferente ubicación en el tiempo; sólo se pueden operar cifras que estén ubicadas en el mismo momento. El concepto de equivalencia es la base para poder comparar, en términos monetarios, dos o más valores diferentes en dos momentos diferentes.

- Dos valores diferentes ubicados en diferentes momentos del tiempo, pueden ser, para un inversionista particular, indiferentes. En principio, no se puede saber cuál cifra tiene más valor, ingresar un millón y medio de pesos hoy o ingresar dos millones de pesos dentro de ocho meses; el resultado dependerá de la tasa de interés que se aplique.

- Si la alternativa es recibir $130.000 dentro de un año a cambio de no recibir $100,000 hoy y usted la toma, está aceptando que esos dos valores son equivalentes desde el punto de vista financiero, es decir indiferentes, en el sentido de que cualquiera de las dos opciones lo dejaría a usted satisfecho.

INTERÉS (I)

- Es la utilidad o ganancia que genera el capital. Los $30.000 de diferencia en el ejemplo anterior son el interés devengado por el capital. Otros términos con los cuales se conoce normalmente el interés son: servicio de la deuda, el rédito, el rendimiento y el canon del arrendamiento financiero.

- El interés se devenga sobre la base de un tanto por ciento del capital y en relación con el número de periodos de tiempo en que se disponga del capital.

- El interés depende de tres factores fundamentales: el capital, la tasa de interés y el tiempo.

TASA DE INTERÉS (i)

- La tasa de interés les permite a las personas comparar valores presentes con valores futuros porque, por su misma naturaleza ella refleja la disyuntiva existente entre poder adquisitivo presente y futuro

- Es la cifra que hace equivalentes dos valores diferentes, ubicados en diferentes momentos del tiempo.

- Generalmente y para efectos comerciales, la tasa de interés se expresa en términos porcentuales anuales, aunque también puede expresarse para períodos menores (semestre, trimestre, mes, etc.), de acuerdo con algún propósito particular.

- Lo que un inversionista exige como pago por el hecho de no disponer del dinero ahora a cambio de hacerlo dentro de un periodo determinado, se llama interés, cuyo valor variará de acuerdo con sus expectativas y el riesgo que él considera está asumiendo al comprometer sus fondos.

Ejemplo 1: Un préstamo de 10 millones de pesos paga un interés del 2% mensual; es decir, un monto de $200.000 mensuales por intereses.

Ejemplo 2: Un préstamo de cuatro millones de pesos se cancelará en dos cuotas semestrales iguales de dos millones cada una. Si la tasa de interés es del 8% semestral, calcular los montos de interés que se deben cancelar por período:

Solución

PERÍODO	Capital Comprometido	Tasa de Interés	Tasa de Interés
1er Semestre	$4.000.000	8,0 %	$320.000
2º Semestre	$2.000.000	8,0 %	$160.000

(Nótese que al final del primer semestre se abonan $2.000.000 al capital comprometido en el préstamo, por lo tanto el saldo de capital por pagar para el segundo semestre es de solamente $2.000.000, lo cual disminuye el interés generado a $160.000).

TIEMPO (t)

Es el lapso que transcurre entre dos momentos distintos, el cual se puede medir en días, semanas, decenas, quincenas, meses, trimestres, años, siglos, etc.

MODALIDADES DE INTERÉS

El interés se causa generalmente por períodos. Cuando los intereses se acumulan dan lugar a una de dos modalidades de acumulación: el interés simple y el interés compuesto.

INTERÉS SIMPLE

En esta modalidad los intereses se acumulan sumándolos simplemente en una cuenta aparte del capital, sin capitalizarlos. Al final el arrendatario entrega al prestamista el valor del capital y los valores acumulados de interés simple.

INTERÉS COMPUESTO

En esta modalidad los intereses, una vez causados se capitalizan, es decir, se llevan a la cuenta de capital, de tal manera que son objeto de generar más intereses sobre ellos mismos una vez capitalizados. Es como si el interés generado se entregara al inversionista y éste se lo devolviera nuevamente al arrendatario como un nuevo préstamo.

En síntesis, la modalidad de Interés Compuesto capitaliza los intereses causados, mientras que la modalidad de Interés Simple no los capitaliza.

Ejemplo 3: Un préstamo de 100 millones de pesos se pacta a un año, al cabo del cual se cancela el capital involucrado y todos los intereses causados con una tasa de interés del 2% mensual. Calcular el monto que se debe pagar al cabo del año con cada una de las modalidades, Interés simple e Interés compuesto:

Solución:

INTERÉS SIMPLE

Capital Principal =	$ 100.000.000
Tiempo =	12 meses
Tasa de interés =	2 % mensual

MES	Capital Inicial ($)	Intereses Generados	Capital Final	Intereses Acumulados ($)
1	$100.000.000	$2.000.000	$100.000.000	$2.000.000
2	$100.000.000	$2.000.000	$100.000.000	$4.000.000
3	$100.000.000	$2.000.000	$100.000.000	$6.000.000
4	$100.000.000	$2.000.000	$100.000.000	$8.000.000
5	$100.000.000	$2.000.000	$100.000.000	$10.000.000
6	$100.000.000	$2.000.000	$100.000.000	$12.000.000
7	$100.000.000	$2.000.000	$100.000.000	$14.000.000
8	$100.000.000	$2.000.000	$100.000.000	$16.000.000
9	$100.000.000	$2.000.000	$100.000.000	$18.000.000
10	$100.000.000	$2.000.000	$100.000.000	$20.000.000
11	$100.000.000	$2.000.000	$100.000.000	$22.000.000
12	$100.000.000	$2.000.000	$100.000.000	$24.000.000
	TOTALES		**$100.000.000**	**$24.000.000**

INTERÉS COMPUESTO

MES	Capital Inicial ($)	Intereses Generados	Capital Final	Intereses Acumulados ($)
1	100.000.000	2.000.000	102.000.000	----
2	102.000.000	2.040.000	104.040.000	----
3	104.040.000	2.080.800	106.120.800	----
4	106.120.800	2.122.416	108.243.216	----
5	108.243.216	2.164.864	110.408.080	----
6	110.408.080	2.208.162	112.616.242	----
7	112.616.242	2.252.325	114.868.567	----
8	114.868.567	2.297.371	117.165.938	----
9	117.165.938	2.343.319	119.509.257	----
10	119.509.257	2.390.185	121.899.442	----
11	121.899.442	2.437.989	124.337.431	----
12	124.337.431	2.486.749	126.824.180	----
	TOTALES		**$126.824.180**	**----**

Como puede observarse en los cálculos anteriores, el interés que mes a mes genera la modalidad de Interés Compuesto es mayor que el que genera la modalidad de Interés Simple, debido a que el capital va aumentando en la medida en que los intereses se le acumulan (se capitalizan). También se observa cómo el pago total, involucrando el préstamo y los intereses al final del período, resulta mayor en la modalidad de interés Compuesto para las mismas cifras de tasa de interés y de número de períodos.

Ejemplo 4: Un préstamo de cien mil pesos se pacta a un año, al cabo del cual se cancela el capital involucrado y todos los intereses causados con una tasa de interés del 2% mensual. Calcular el monto que se debe pagar al cabo del año con cada una de las modalidades, Interés simple e Interés compuesto

Solución:

TASA DE INTERÉS MENSUAL: 2%

A INTERÉS SIMPLE | **A INTERÉS COMPUESTO**

MES	SALDO INICIAL	INTERES	SALDO FINAL	MES	SALDO INICIAL	INTERES	SALDO FINAL
0	$ 100.000		$ 100.000	0	$ 100.000		$ 100.000
1	100.000	$ 2.000	102.000	1	100.000	$ 2.000	102.000
2	100.000	2.000	104.000	2	102.000	2.040	104.040
3	100.000	2.000	106.000	3	104.040	2.081	106.121
4	100.000	2.000	108.000	4	106.121	2.122	108.243
5	100.000	2.000	110.000	5	108.243	2.165	110.408
6	100.000	2.000	112.000	6	110.408	2.208	112.616
7	100.000	2.000	114.000	7	112.616	2.252	114.869
8	100.000	2.000	116.000	8	114.869	2.297	117.166
9	100.000	2.000	118.000	9	117.166	2.343	119.509
10	100.000	2.000	120.000	10	119.509	2.390	121.899
11	100.000	2.000	122.000	11	121.899	2.438	124.337
12	100.000	2.000	124.000	12	124.337	2.487	126.824

EXPRESIÓN DE LA TASA DE INTERÉS

La tasa de interés se puede expresar de dos maneras: en forma decimal o en forma porcentual. Ejemplo: si $100.000 generan un interés (I) de $2.000, la tasa de interés se puede hallar dividiendo el interés ganado entre el capital que lo generó, así: 2.000 / 100.000 = 0.02; esta es la expresión decimal, para hallar la expresión porcentual basta con multiplicar la expresión decimal por 100, así: 0.02 X 100 = 2%. De forma similar, si se tiene la tasa de interés porcentual, para hallar la decimal basta con dividir entre 100, así: 2% ➔ 2% / 100 = 0.02.

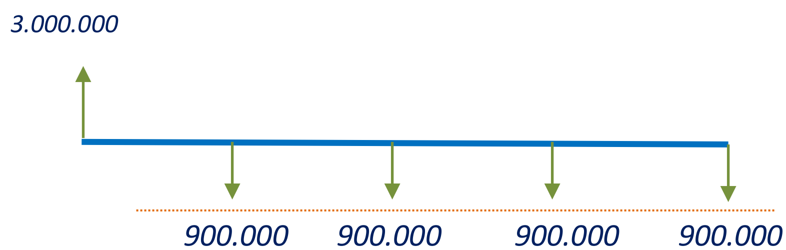
Ejercicio 1. Exprese en forma decimal las siguientes tasas de interés porcentual: 1%, 5%, 10%, 90%, 120%, 50%, 25%, 230%.

Solución: 0.01 - 0.05 - 0.1 - 0.9 - 1.2 - 0.5 - 0.25 - 2.3.

LÍNEAS DE TIEMPO

Son representaciones gráficas de una situación que involucra ingresos y/o egresos monetarios; por mera convención, los ingresos se orientan con la cabeza de flecha hacia arriba y los egresos hacia abajo. Se utiliza para visualizar un problema planteado y facilitar su comprensión.

Ejemplo 5: Se recibe un crédito de $3.000.000 para pagarlo en cuatro cuotas mensuales de $900.000, grafique la situación.



PERÍODOS (t en interés Simple; n en int Compuesto)

Son los diferentes lapsos iguales en que se divide el tiempo entre un valor presente y un valor futuro. El tiempo transcurrido entre el 1º de enero y el 31 de octubre se puede determinar en períodos mensuales (10 meses= 300 días / 30 días), quincenales (20 quincenas = 300 días / 15 días), trimestrales (3,33 trimestres = 300 días / 90 días).

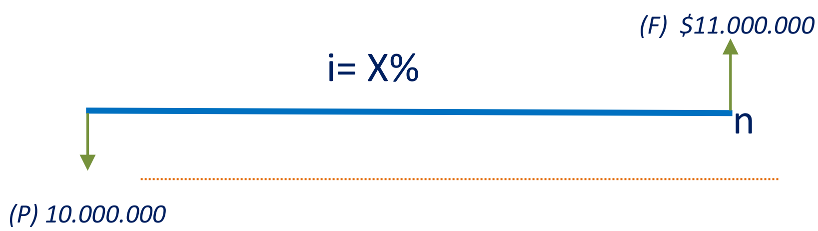
Recuerde: En las formulaciones matemáticas, los períodos se denotan con la letra **t** cuando se trata de interés simple y con la letra **n** cuando se trata de interés compuesto, pero son sólo convenciones, se puede usar "n" o "t" para los dos casos.

VALOR PRESENTE (P)

Es el monto o cantidad de pesos o cualquier unidad monetaria en el momento cero, hoy, o en un momento anterior a otro denominado Futuro. [Muchos autores lo denotan VP, yo utilizo P].

VALOR FUTURO (F)

Es el monto o cantidad de pesos o cualquier unidad monetaria que equivale en un momento futuro a un valor presente, dada una tasa de interés. Ejemplo, si se invierte diez millones de pesos (P) a una tasa de interés i = x%, durante un período de tiempo n, se obtiene al final once millones (F).



CAPITULO 3

Interés Simple

Esta modalidad de interés consiste en la acumulación simple de los intereses generados, sin que éstos generen nuevo beneficio; es decir, sin capitalizarlos.

EN ESTE CAPÍTULO

- **Cálculo del Interés Generado (I)**
  - $i = (F / P - 1) / t$
- **Cálculo del Valor Futuro (F)**
  - $F = P \times (1 + i \times t)$
- **Cálculo del Valor Presente (P)**
  - $P = F / (1 + i \times t)$
- **Cálculo de la Tasa de interés (i)**
  - $i = (F / P - 1) / t$
- **Cálculo del tiempo (t)**
  - $t = (F / P - 1) / i$

INGENIERÍA ECONÓMICA – INTERÉS SIMPLE

FORMULACIONES: Cálculo del Monto de Interés

El monto de los intereses acumulados se obtiene de multiplicar el capital principal (P) por la tasa de interés periódica (i) y por el número de períodos por los cuales se acumula el interés (t).

$$I = P x i x t$$

I : Monto de los intereses ($)
P : Monto del capital principal ($)
i : Tasa de interés por período (%)
t : Número de períodos (días, meses, años, etc.)

Ejemplo: Calcular el monto de interés que paga un préstamo de $500.000 al 1,5% mensual por un período de 18 meses:

Capital = $500.000
Tasa = 1,5% = 0,015
Tiempo = 18 períodos

Monto de Intereses = 500.000 x 0,015 x 18 = **$ 135.000**

Cálculo del Valor Futuro

El concepto de <u>equivalencia</u> permite cuantificar el monto total al que equivale un capital principal en el futuro para restituirlo incluyendo sus intereses.

El monto futuro equivalente se calcula sumando al monto de capital principal el monto de los intereses generados.

$$F = P + I$$

$$F = P \times (1 + i \times t)$$

F :	Monto futuro equivalente ($)
I :	Monto de los intereses ($)
P :	Monto del capital principal ($)
i :	Tasa de interés por período (%)
t :	Número de períodos (días, meses, años, etc.)

Ejemplo: Calcular el pago total (o monto futuro equivalente) que cancela un préstamo de $500.000 al 1,5% mensual por 18 meses:

Capital = $500.000
Tasa = 1,5% = 0,015
Tiempo = 18 períodos
Monto de Intereses = 500.000 x 0,015 x 18 = $ 135.000

Monto Futuro = 500.000 + 135.000 = **$ 635.000**

También se puede calcular directamente, así:

Monto Futuro = 500.000 x (1 + 0,015 x 18) = **$ 635.000**

Cálculo del Valor Presente

Dado un monto futuro es posible encontrar el monto presente o monto del capital en el momento presente utilizando la siguiente fórmula:

$$\mathbf{P = F / (1 + i \times t)}$$

P : Monto presente equivalente ($)
F : Monto futuro ($)
i : Tasa de interés por período (%)
t : Número de períodos (días, meses, años, etc.)

Ejemplo: Calcular el valor presente de una deuda que debe cancelar $3.000.000 dentro de 18 meses, si el interés pactado es del 3% mensual:

Monto futuro = $3.000.000
Tasa = 3% = 0,03
Tiempo = 18 períodos
Monto Presente = 3.000.000 / (1 + 0,03 x 18) = **$ 1.948.052**

Cálculo de la Tasa de Interés

Teniendo los demás términos de la ecuación anterior, es posible calcular la tasa de interés de equivalencia de dichas cantidades.

$$i = (F / P - 1) / t$$

i : Tasa de interés por período (%/100)
F : Monto futuro equivalente ($)
P : Monto del capital principal ($)
t : Número de períodos (días, meses, años, etc.)

Ejemplo: Calcular la tasa de interés mensual que se aplica a un préstamo de $1.000.000 que se cancela con $1.750.000 a los 20 meses:

Capital = 1.000.000
Monto Futuro = 1.750.000
Tiempo = 20 meses

Tasa de Interés = ((1.750.000 / 1.000.000) – 1) / 20 = **3,75%** mensual

Cálculo del tiempo

Se puede hallar la variable tiempo (número de períodos) con la siguiente fórmula:

$$t = (F / P - 1) / i$$

t : Número de períodos (días, meses, años, etc.)
F : Monto futuro equivalente ($)
P : Monto del capital principal ($)
i : Tasa de interés por período (%)

Ejemplo: Calcular el tiempo necesario para que $10.000.000 se conviertan en $15.000.000 a una tasa del 2,5% mensual.

Capital = 10.000.000
Monto Futuro = 15.000.000
Tasa = 2,5 % mensual

Tiempo = ((15.000.000 / 10.000.000) – 1) / 0,025 = **20 meses**

EQUIVALENCIA ENTRE TASAS DE INTERÉS SIMPLE

La tasa de interés se tiene como porcentaje por unidad de tiempo. Este período puede coincidir o no con el período que maneje el negocio. Es muy usual enunciar la tasa de interés en términos anuales (tasa nominal); si se requiere en otra base (tasa periódica) se debe convertir dividiendo la cifra entre el número de períodos que comprenda el año (12 meses, 360 días, etc.).

$$i_p = i_n / n$$

i_p: Tasa de interés periódica (% por día, mes, etc.)
i_n: Tasa de interés nominal (% anual)
n : Número de períodos por año (días, meses, etc.)

Ejemplo 1: Calcular la tasa mensual correspondiente a una tasa del 30% anual:

Número de períodos = 12 meses por año

Tasa periódica = 30 / 12 = **2,5% mensual**

Ejemplo 2: Calcular la tasa anual correspondiente a un interés del 7% trimestral:

Número de períodos = 4 trimestres por año
Tasa nominal = 7 x 4 = **28,0% anual**

Ejercicios:

1. Una empresa tiene la siguiente equivalencia financiera: $150,000 de hoy son equivalentes a $165,600 dentro de 4 meses. Cuál es la tasa de interés simple mensual de la empresa? R/ 2,6% mensual

2. Una entidad financiera ofrece pagar una tasa de interés simple del 28% anual a una comercializadora interesada en ahorrar $1.000.000, la cual tiene dentro de sus políticas financieras que cada peso que invierta debe convertirse en $1,15 en 6 meses. Cuál debe ser la respuesta de la compañía comercializadora?

R/ La tasa de interés deseada anual de la empresa es i = 30% anual. ➔ **Conclusión**: se debe rechazar la oferta, pues la tasa ofrecida, 28% es inferior a la tasa del 30% deseada.

3. Qué cantidad de dinero se poseerá después de prestar $100,000 al 24% anual durante dos años, si la tasa de interés es simple? R/: F = $148.000.

4. Halle el valor a cancelar dentro de diez meses por un préstamo de $55.000.000 recibidos el día de hoy, si la tasa de interés simple es del 2.5% mensual. R/: F = $68.750.000.

5. Halle el valor a cancelar el 31 de diciembre si el 1º de enero le prestaron $320.000 a una tasa de interés simple anual del 30%. R/: F = $416.000.

6. Cuánto dinero presté hace año y medio al 30% anual si recibí $89.900? R/: P = $62.000.

Taller No. 1

1. Calcule el monto de los intereses que paga un préstamo de $600.000 por un año al 2% mensual. (Resp. $144.000).

2. Calcule el monto de intereses que Ud. Debe pagar por un crédito estudiantil de $5.000.000 otorgado por cuatro años al 1% mensual. (Resp. $2.400.000).

3. Ud. Compra un televisor por $3.800.000 cancelando $800.000 al momento de cerrar el negocio y comprometiendo el saldo a 10 meses con un interés del 1,9% mensual. ¿Cuánto pagará para cancelar ese compromiso? (Resp. $3.570.000).

4. Ud. necesita cancelar un valor de $2.500.000 dentro de seis meses. Cuenta con $2.250.000 hoy, los que puede colocar a una tasa de interés simple del 2% mensual. Calcule el monto de dinero que le faltará o le sobrará dentro de seis meses al cancelar la cifra mencionada. (Resp. Sobran $20.000).

5. Calcule el valor de la tasa de interés que permitiría cancelar exactamente la cifra del pago a seis meses en el problema 4. (Resp. 1,85%).

6. ¿Cuántos años debe permanecer una inversión al 25% anual de interés simple para doblar el capital? (Resp. 4 años).

7. ¿Cuál es el interés trimestral correspondiente a una tasa del 24% anual? (Resp. 6% trimestral).

8. ¿Cuál es la tasa nominal de un interés del 2,5% mensual?(Resp.30% anual)

9. Establecer la tasa nominal de un préstamo de $4.000.000 que paga $800.000 de intereses en 10 meses. (Resp. 24% anual)

10. Calcular el monto que cancela un préstamo de $1.000.000 de capital inicial por un plazo de 275 días a un interés del 20% anual. (Resp. $1.152.778)

11. Electrodomésticos ITEAN desea establecer la tasa nominal que debe aplicar a sus créditos (equivalentes al 60% del precio de venta), de tal modo que el monto de interés que aplica en el plazo de 8 meses represente el 12% del precio de venta. (Resp. 30% anual)

12. Calcule la tasa de interés mensual simple equivalente a una tasa de interés del 2% mensual compuesta (Res.: 2,235% mensual)